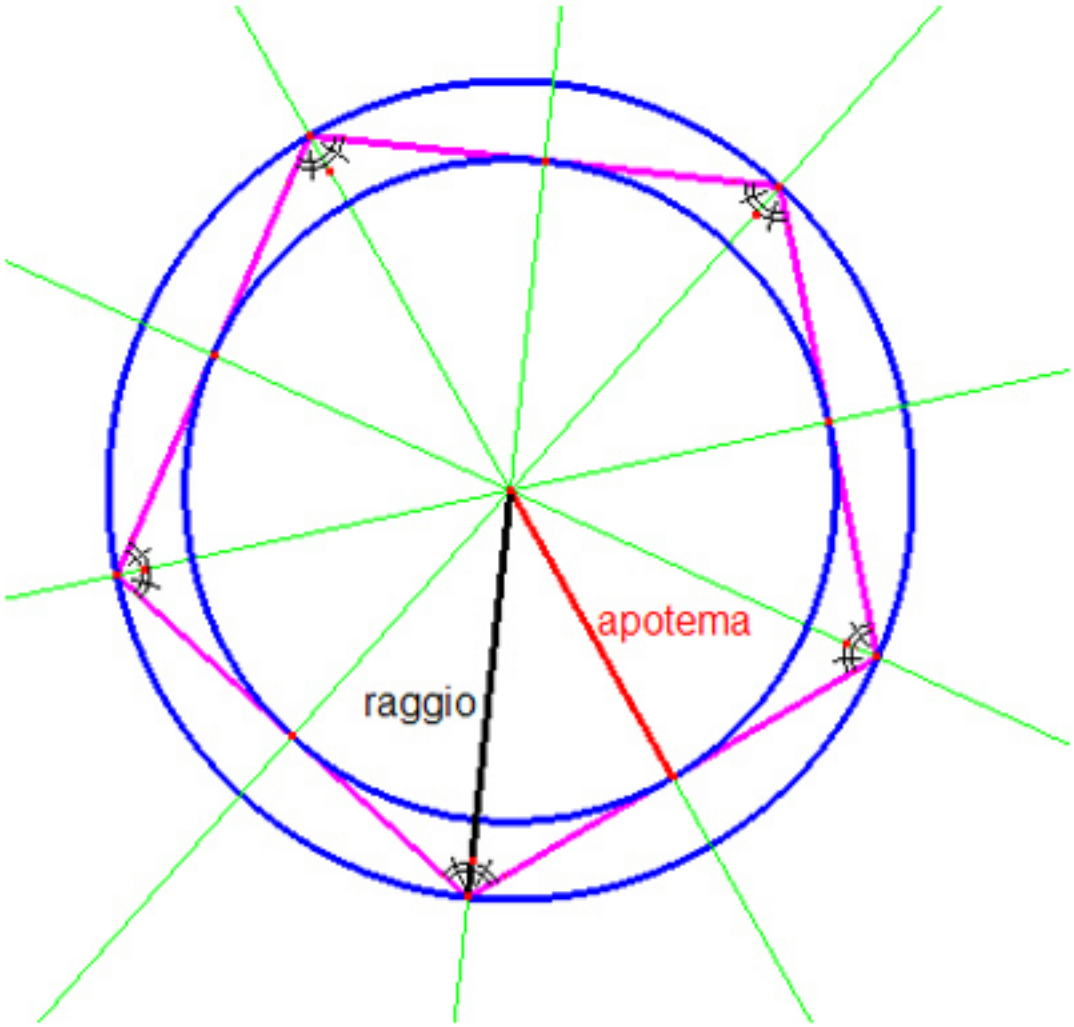
SULLE AREE ED I PERIMETRI DEI POLIGONI REGOLARI



Luciano Ancora

PARTE I

(Testo italiano)

SULLE AREE ED I PERIMETRI DEI POLIGONI REGOLARI

Sempre sul tema guida di questo libro(*), illustrato nell'introduzione, un'altra interessante "riscoperta" l'ho fatta mentre indagavo su un argomento storico della matematica: quello della scoperta fatta dal matematico indiano *Madhava di Sangamagrama* nel 1400, e poi da *Gregory* e *Leibniz* nel 1600, secondo cui il valore di π si ottiene dalla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Alla consueta ricerca di un modello geometrico che potesse spiegare la serie, ho "calcolato" agevolmente con Autocad (**) i valori delle aree dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio unitario, ottenuti partendo dal triangolo equilatero, raddoppiando successivamente il numero dei lati. Come è noto, il valore di π corrisponde all'area del poligono con infiniti lati (cerchio). Ho poi calcolato i semi-perimetri delle stesse figure disegnate, poichè anche la sequenza di questi valori conduce a π . I risultati ottenuti sono elencati nella tabella seguente:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
3	1,299038	2,598076
6	2,598076	3,000000
12	3,000000	3,105829
24	3,105829	3,132629
48	3,132629	3,139350
96	3,139350	3,141032

La "riscoperta" di cui accennavo all'inizio, sta nel fatto che le due sequenze di valori ***coincidono perfettamente***, a meno della scalatura. C'era da aspettarselo, in quanto le due sequenze sono stare costruite sullo stesso modello geometrico e conducono allo stesso risultato, anche se singolarmente esprimono quantità diverse. Bisognerà tuttavia darne una dimostrazione.

(*) Si tratta del mio libro "Leggendo Archimede".

(**) Disegnata una "*regione*" piana, la sua area ed il suo perimetro si ottengono con i comandi "*Inquiry*" e "*Region/Mass*

Lo stesso risultato di sopra si ottiene partendo dal quadrato e dal pentagono:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
4	2,000000	2,828427
8	2,828427	3,061467
16	3,061467	3,121445
32	3,121445	3,136548
64	3,136548	3,140331
128	3,140331	3,141277

N. Lati	Area	Semi-perimetro
5	2,377641	2,938926
10	2,938926	3,090170
20	3,090170	3,128689
40	3,128689	3,138364
80	3,138364	3,140785
160	3,140785	3,141391

per cui sembra possibile una estensione, comprendendovi poligoni regolari di un qualsiasi numero di lati. Generalizzando poi a circonferenze di raggio *R* qualsiasi, questi risultati consentirebbero di affermare quanto segue:

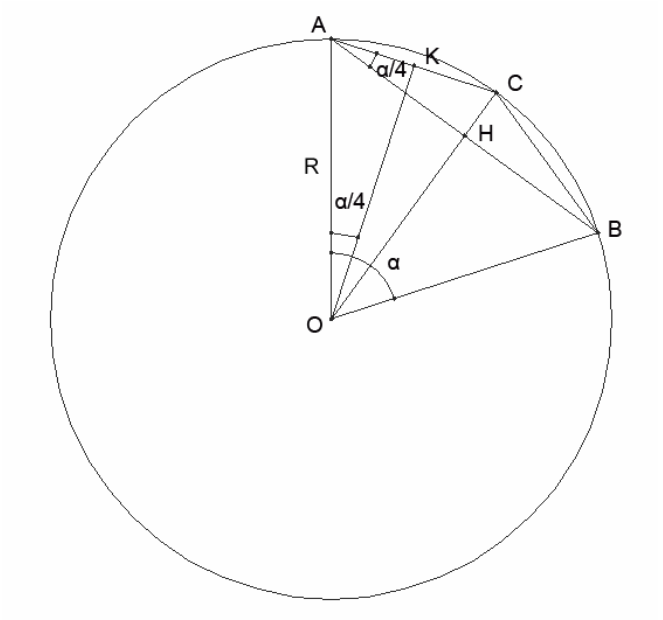
Il valore numerico del semi-perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio R, è uguale al valore numerico dell'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

Questa affermazione ha, per ora, il valore di una semplice constatazione, senza alcun valore, in quanto mette a confronto quantità eterogenee, quali lunghezze ed aree. Le forniremo allora un significato geometrico, elevandola al rango di teorema, formulandola invece nel seguente modo:

L'area del rettangolo avente per base il semi-perimetro di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio R, e per altezza lo stesso raggio R, è uguale all'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

Dimostrazione

Consideriamo, in un cerchio di raggio *R*, uno spicchio generico di ampiezza α , dove α è l'ennesima parte di 2π, e costruiamo in esso un ennesimo dei poligoni di n e $2n$ lati in esame.

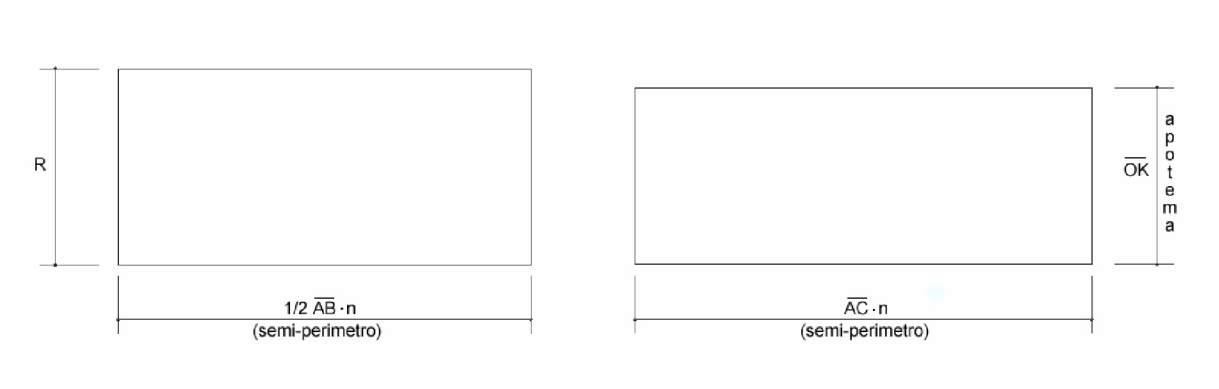


Nella figura sono evidenti le seguenti relazioni:

$$\overline{OK} = \overline{OA}\cos\frac{\alpha}{4} = R\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\cos\frac{\alpha}{4}}$$

Dobbiamo dimostrare l'equivalenza dei rettangoli:



cioè che:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot n\cdot R=\overline{AC}\cdot n\cdot\overline{OK}$$

eliminando n si ha:

$$\overline{AH}\cdot R=\overline{AC}\cdot\overline{OK}$$

e sostituendo:

$$\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R=\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R$$

che è l'identità che dimostra il teorema.

<u>Osservazioni</u>

Esaminando ancora una volta i due rettangoli a confronto della figura precedente, si può notare che, mentre la base del secondo rettangolo si "*allunga*", rispetto alla prima, di un fattore *1/cos(α/4)*, l'altezza dello stesso si "*accorcia*" di un fattore *cos(α/4)*. Così, il loro prodotto resta invariato, e procedendo con il raddoppio del numero dei lati dei poligoni, si generano le coppie di figure equivalenti osservate.

Inoltre, sfruttando il fattore variabile *1/cos(α/4)* visto sopra, sembra agevole, partendo dal valore 3 del semi-perimetro dell'esagono regolare, costruire una sequenza infinita di valori il cui limite è π.

Conclusione

In questo articolo abbiamo "rispolverato" una delle tante curiosità della matematica che, a causa della loro scarsa importanza, tendono a cadere nell'oblio, ma che non cessano di meravigliarci, quando, percorrendo strade diverse, fortuitamente ci imbattiamo in esse.

P.S.

Mi è venuto in mente, in un secondo momento, che si poteva fare a meno della trigonometria, sia nella dimostrazione che nella osservazione, mettendo da parte $cos(\alpha/4)$ e sfruttando invece nei ragionamenti, forse in maniera più semplice, le relazioni di proporzionalità esistenti fra i lati dei triangoli rettangoli simili OAK e ACH.

PARTE II

(Testo inglese)

ON AREAS AND PERIMETERS OF REGULAR POLYGONS

Still on the guiding theme of this book(*), illustrated in the introduction, I made another interesting "rediscovery" by investigating a historical subject of mathematics: the discovery of the indian mathematician Madhava of Sangamagrama, made in the 1400s, according to which the value of π is obtained from this formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Looking for a geometric model that could explain this series, I easily "calculated" using Autocad (**) the areas values of regular polygons inscribed in a unit radius circumference, starting from the equilateral triangle, and doubling subsequently the number of sides. As is known, the value of π corresponds to the area of the polygon with infinite sides (circle). I then calculated half-perimeters of same figures, as also the sequence of these values leads to π . Results are listed in the following table:

Sides	Area	Half-perimeter
3	1,299038	2,598076
6	2,598076	3,000000
12	3,000000	3,105829
24	3,105829	3,132629
48	3,132629	3,139350
96	3,139350	3,141032

The mentioned "rediscovery" lies in the fact that the two sequences are ***perfectly coincident***, unless the offset. There was to be expected, since the two sequences are built on the same geometric model and lead to the same result, even if individually they express different quantities.It must, however, give a demonstration.

(*) This is my book "By Reading Archimedes"

(**) Once a flat "region" is drawn, its area and perimeter are obtained with the "Inquiry" and "Region / Mass Properties" commands.

Same results are obtained starting from the square and the pentagon:

Sides	Area	Half-perimeter
4	2,000000	2,828427
8	2,828427	3,061467
16	3,061467	3,121445
32	3,121445	3,136548
64	3,136548	3,140331
128	3,140331	3,141277

Sides	Area	Half-perimeter
5	2,377641	2,938926
10	2,938926	3,090170
20	3,090170	3,128689
40	3,128689	3,138364
80	3,138364	3,140785
160	3,140785	3,141391

so seems possible an extension, including regular polygons of any number of sides. Then, generalizing to circumferences of any radius *R*, these results make it possible to assert what follows:

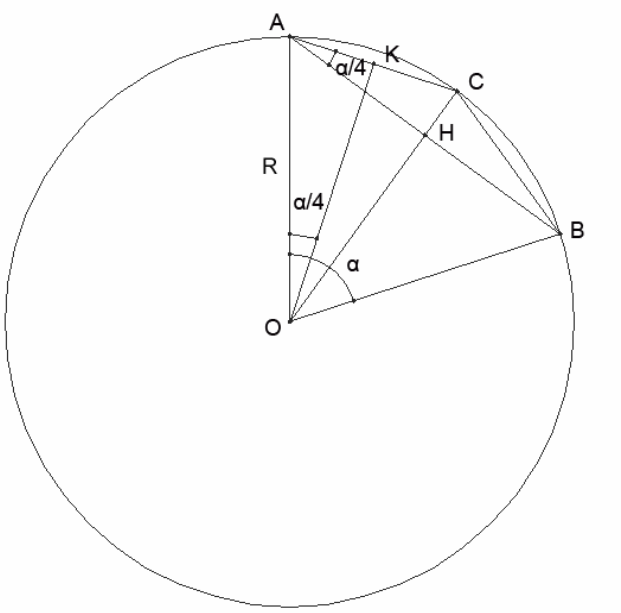
The numerical value of the half-perimeter of a regular n-sided polygon, inscribed in a circle of radius R, is equal to the numerical value of the area of the regular polygon of 2n sides inscribed in the same circle.

This statement has the value of a simple observation, without any value, since it compares heterogeneous quantities such lengths and areas. We will then give it a geometric meaning, elevating it to the rank of theorem, formulating it instead as follows:

The area of the rectangle having as its base the half-perimeter of a regular polygon of n sides inscribed in a circle of radius R, and for height the same radius R, is equal to the area of the regular polygon of 2n sides inscribed in the same circle.

Proof

Consider, in a circle of radius *R*, a generic slice of amplitude *α*, where *α* is the umpteenth part of *2 π*, and we construct in it the umpteenth part of polygons of *n* and *2n* sides under consideration.

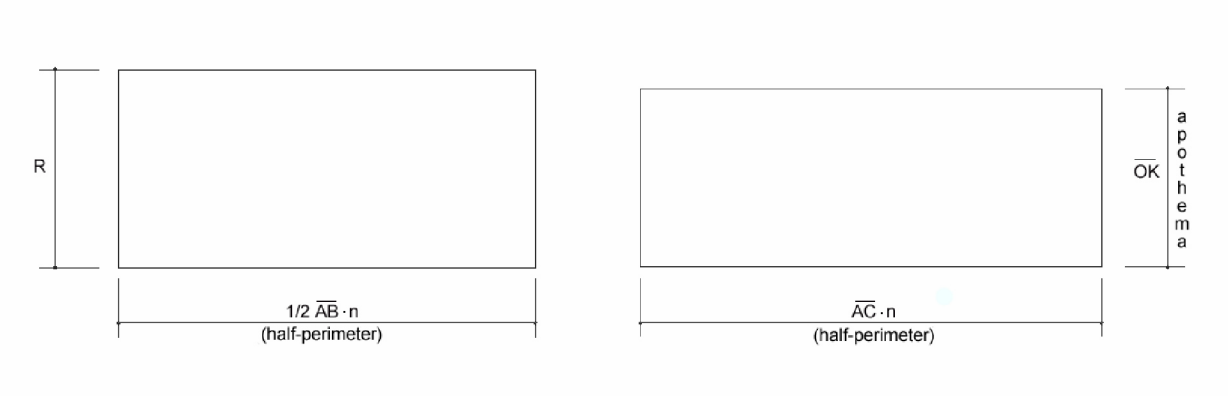


The figure shows the following relationships:

$$\overline{OK} = \overline{OA}\cos\frac{\alpha}{4} = R\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\cos\frac{\alpha}{4}}$$

We must prove the equivalence of rectangles:



that is:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot n\cdot R=\overline{AC}\cdot n\cdot\overline{OK}$$

by deleting n you have:

$$\overline{AH}\cdot R=\overline{AC}\cdot\overline{OK}$$

and replacing:

$$\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R=\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R$$

which is the identity that proves the theorem.

<u>Remarks</u>

Examining once again the two rectangles compared to the previous figure, it can be seen that, while the base of second rectangle "extends", with respect to the first, by a factor 1 / cos (α / 4), the height of the same "shortens" by a factor cos (α / 4). Thus, their product remains unchanged, and doubling later sides of polygons, pairs of equivalent figures are generated.

In addition, by exploiting the variable factor 1 / cos (α / 4) seen above, it seems easy, starting from the value 3 of semi-perimeter of regular hexagon, construct an infinite sequence of values whose limit is π.

Conclusion

In this article we have "dusted off" one of the many curiosities of mathematics which, due to their low importance, tend to fall into oblivion, but which never cease to amaze us, when, walking along different paths, we accidentally encounter them.

P.S.

It came to my mind, later, that one could do without trigonometry, both in the demonstration and in the observation, putting aside cos (α / 4) and exploiting instead in the reasoning, perhaps in a simpler way, the existing proportionality between sides of similar right-angled triangles OAK and ACH.